Математическое моделирование (радиотехнических) устройств и систем

(ММ(Р)УС)

Парамонов Александр Иванович

alex-in-spb@yandex.ru

Введение

Теория оптимизации основана на использовании математических методов для нахождения оптимальных, в определенном смысле, решений различных задач.

Определение смысла оптимального решения является задачей прикладной области. В области построения и эксплуатации сетей связи, могут рассматриваться оптимальные решения в части выбора физической и логической структуры сети связи, параметров сетевых элементов, распределения ресурсов, управления трафиком и качеством обслуживания с учетом необходимых требований и нормативов и др.

Основные этапы получения оптимального решения состоят в описании модели рассматриваемой системы, определении целевой функции и нахождении ее экстремума. Реализация этих этапов зависит от специфики и сложности конкретной задачи и может быть выполнена различными методами.

В данном материале рассматриваются возможные подходы и методы решения подобных задач.

1. Понятие оптимизации

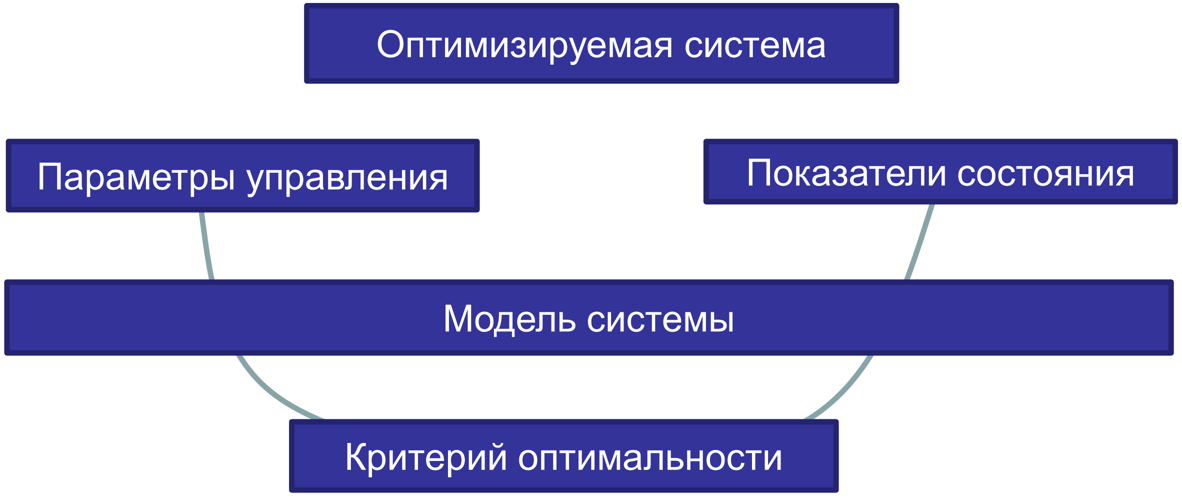
Оптимизация это поиск такого решения, во множестве всех возможных решений, которое по некоторым признакам предпочтительнее других.

Optimus (лат.) – лучший.

Оптимальное состояние – такое состояние системы, в котором любое изменение параметров управления не приводит к желаемым изменениям состояния.

Для постановки задачи оптимизации необходимо иметь:

1. Предмет оптимизации – оптимизируемая система (связи)
2. Возможность влияния на систему (модель системы), посредством набора некоторых параметров
3. Возможность оценки состояния системы (модели системы)



По современным представлениям анализ, синтез и управление сложными системами практически любого происхождения, в том числе, и сетей связи, возможны лишь на основе описания этих систем в форме математических моделей.

Для описания таких моделей характерно наличие двух групп элементов, увязанных в единую систему и взаимодействующих друг с другом:

-значения элементов одной группы могут изменяться в определенных границах;

-значения элементов второй группы зависят от значений элементов первой группы.

Параметры управления – параметры системы, которыми можно изменять, и изменение которых приводит к изменению состояния системы (параметров функционирования системы)

Показатели состояния системы – некоторые параметры системы, значения которых характеризуют состояние системы или интересующие нас показатели ее функционирования.

Например, если под системой понимать линию связи между двумя узлами сети связи, то параметрами управления могут быть, такие параметры, как число каналов (соединительных линий), пропускная способность (скорость ПД), число физических линий (кабелей) и т.п., а показателями состояния могут быть такие параметры, как вероятность потерь (доля потерянных вызовов), время доставки пакета данных, надежность линии связи и т.п.

В таком случае можно говорить о параметрах управления и целевой функции.

Оптимизация состоит в поиске такого набора параметров управления, при котором целевая функция достигает экстремума.

Этим достигается **новое качественное состояние системы** – экстремальность результата ее функционирования по заданному критерию качества.

Задачи оптимизации СС

- **Задачи выбора структуры сети**

1.1 выбор числа уровней иерархии

1.2 оптимизация уровня (число и распред. Узлов, линий)

2 Распределение ресурсов

Пропускная способность

Производит. узлов

- **Задачи выбора плана функционирования сети**

-Задачи проектирования (ввод ресурсов, ввод услуг)

-Задачи эксплуатации (упрю произв. Распр. Трафика)

- **Задачи разработки плана построения сети**

-этапы ввода оборудования

-этапы ввода услуг

-замена оборудования

-ввод новых технологий

2. Этапы оптимизации

Основные этапы оптимизации

1. Формулировка задачи
2. Построение модели системы
3. Выбор параметров управления и показателей состояния
4. Построение целевой функции, связывающей параметры управления и показатели состояния
5. Выбор метода оптимизации целевой функции
6. Решение задачи

На этапе формулировки задачи – необходимо определить предметную область, настоящее состояние и условия в которых находится исследуемая система (сеть или система связи), определить желаемый результат (желаемое состояние).
Построение модели системы – заключается в описании существенных для решения задачи свойств системы, их связей и зависимостей от ряда параметров.
В общем случае, модель системы может быть физической, аналитической, имитационной или комбинированной (аналитическая и имитационная модели являются математическими моделями, имеющими различную реализацию).
Физическая модель предполагает построение системы или ее части (натурное моделирование).
Аналитическая модель предполагает описание свойств исследуемой системы с помощью математических выражений (методов).
Имитационная модель предполагает оценку свойств системы с помощью численных методов (возможно и с использованием аналитических моделей) и реализацию в виде программного обеспечения для ЭВМ.

Выбор параметров управления заключается в определении набора (множества) переменных построенной модели, изменение значений которых приводит к изменению **показателей состояния.**

Построение целевой функции – заключается в описании функциональной зависимости между параметрами управления (независимыми переменными) и некоторым целевым показателем (зависимой переменной).
Для построения целевой функции используется модель системы, показатели состояния которой связываются некоторой функциональной зависимостью с целевым показателем.

Выбор метода оптимизации целевой функции. Решение задачи оптимизации на данном этапе заключается в отыскании такого значения параметров управления, при котором достигается необходимое значение (обычно, минимум или максимум) целевой функции. Для решения данной задачи, в зависимости от вида целевой функции, наличия и вида ограничений на значения переменных, могут быть использованы различные математические (аналитические или численные) методы.

Решение задачи заключается в реализации выбранных методов и выполнении вычислений, в результате которых, будет получено искомое значение параметров управления.

3. Модели сети связи

3.1 Предметная область

Выбор той или иной модели сети связи зависит от предметной области, т.е. от того какие свойства сети связи предполагается оптимизировать. В качестве примера можно привести:

-качество обслуживания трафика (предоставления услуг);

-надежность сети связи (доступность услуг связи);

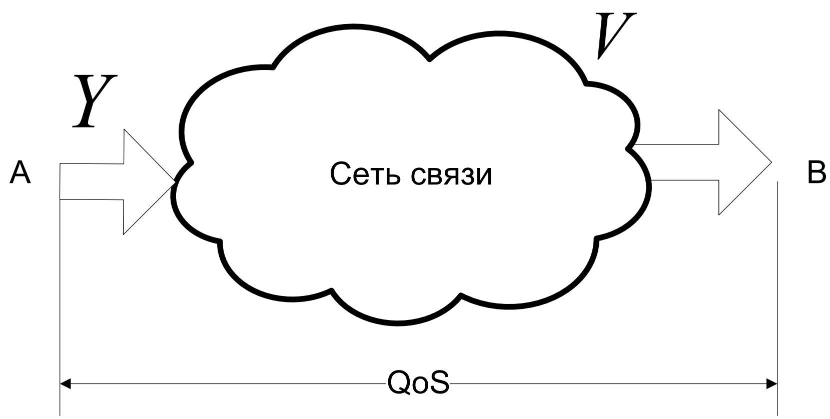
-экономические показатели.

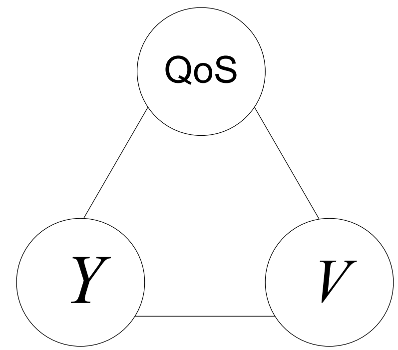
Для моделирования **качества** обслуживания трафика используется модели сети связи как системы массового обслуживания (СМО), известные из теории телетрафика (теории массового обслуживания).

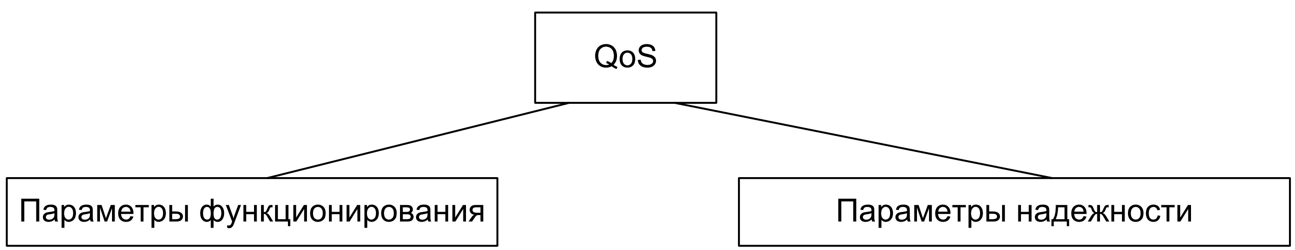
Для моделирования **надежности** сети связи используются методы теории надежности, теории вероятностей и математической статистики.

Для моделирования **экономических** показателей используют методы экономики.

3.2 Модели сети связи как СМО







Основная задача моделирования сети связи – определить соотношение между трафиком, ресурсами сети и качеством обслуживания

3.2.1 Параметры функционирования сети связи

Параметры функционирования

- **Параметры доступности**
  - Вероятность потери вызова
  - Вероятность разъединения
  - Вероятность отказа при установлении сессии
  - Вероятность неуспешной авторизации
  - Вероятность прерывания сессии

$$\overline{p} = \frac{n_0}{n}$$

- **Параметры достоверности (точности)**
  - Качество передачи речи
  - Вероятность ошибок при передаче данных
  - Вероятность потери данных

$$\overline{IPER} = \frac{n_e}{N}$$

$$\overline{IPLR} = \frac{n_L}{N}$$

- **Временные параметры (скорости)**
  - Временные параметры установления соединения
  - Временные передачи пакетов данных

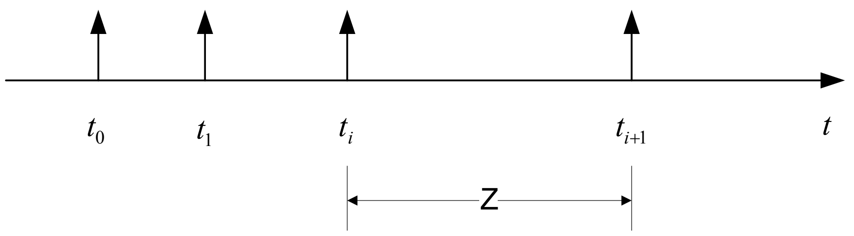
$$\mathbf{t} = \{t_1, \ldots, t_n\}$$

$$\overline{IPTD} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$$

$$\overline{IPDV} = t_{MAX} - t_{MIN}$$

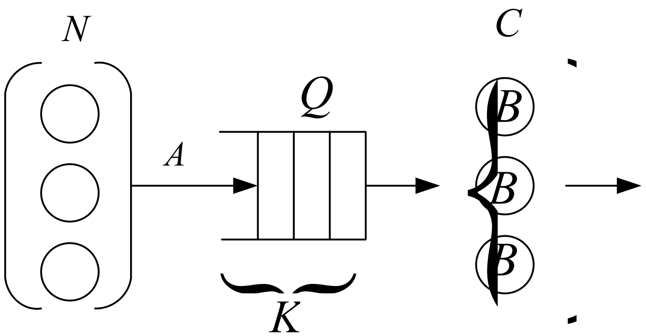
3.2.2 Примеры аналитических модели сетей связи как (СМО)

Сеть связи выполняет работу по обслуживанию трафика. Трафик в сети связи представляет собой процесс поступления и обслуживания заявок пользователей. Процесс поступления заявок, чаще всего, представляет собой случайный процесс. Заявки (вызовы или пакеты данных) поступают в случайные моменты времени. Для обслуживания каждой заявки сеть предоставляет некоторый ресурс, если в момент поступления заявки свободных ресурсов нет, то в зависимости от дисциплины обслуживания, заявка получает либо отказ в обслуживании, либо ставится на ожидание (в очередь).



Z – случайное число

Сеть связи и ее элементы могут быть представлены как системы массового обслуживания (СМО).
Функционирование СМО характеризуется параметрами трафика, параметрами пропускной способности и параметрами качества обслуживания.



3.2.3 Элементарные СМО

Обозначения СМО по Кендаллу (Kendall’s notation)

$$A/B/C/K/N/D$$

А) Тип потока заявок

Символ	Название	Описание
M	Markovian	Простейший поток.
D	Degenerate distribution	Детерминированный поток.
Ek	Erlang distribution	Поток Эрланга k-параметр формы.
G	General distribution	Общий вид распределения.

MAP (Markovian arrival process) **–** промежутки времени между вызовами имеют не экспоненциальное распределение.
BMAP – возможно поступление k заявок в один момент (k-случайное число)
MMPP – Пуассоновский процесс модулированный Марковским процессом.

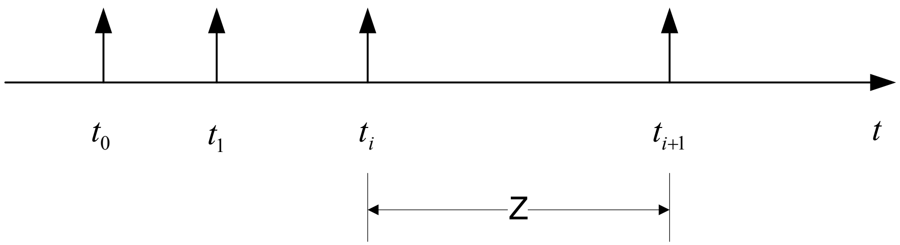
B) Распределение времени обслуживания

Символ	Название	Описание
M	Markovian	Экспоненциальное распределение.
D	Degenerate distribution	Детерминированное время обслуживания.
Ek	Erlang distribution	Распределение Эрланга.
G	General distribution	Общий вид распределение.

C) Число обслуживающих устройств
K) Число мест ожидания
N) Число источников заявок
D) Дисциплина выбора из очереди

Символ	Название	Описание
FIFO/FCFS	First In First Out/First Come First Served	Первым вошел, первым вышел.
LIFO/LCFS	Last in First Out/Last Come First Served	Последним вошел первым вышел.
SIRO	Service In Random Order	Случайный выбор из очереди.
PNPN	Priority service	С пиоритетами.

M/M/V (ДО с потерями)



λ Интенсивность вызовов

μ Интенсивность обслуживания

$\bar{t}$ Средняя продолжительность обслуживания

Простейший поток вызовов

$$p\{z < Z\} = 1 - e^{-\lambda t};$$

Экспоненциальное распределение времени обслуживания

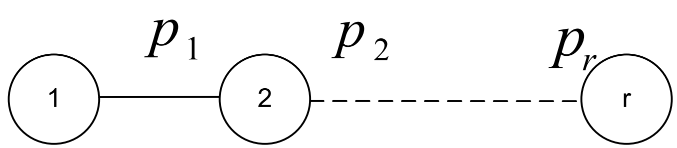
$$p\{z < Z\} = 1 - e^{-\mu t}; \quad \mu = \frac{1}{\bar{t}}; \quad \bar{t}$$

Вероятность потерь вызовов 1 **Формула Эрланга**

$$p = E_v(y) = \frac{\dfrac{y^v}{v!}}{\sum\limits_{i=0}^{v} \dfrac{y^i}{i!}}$$

y Интенсивность нагрузки (Эрл)

v Число обслуживающих устройств (линий)



$$p_M = 1 - \prod_{i=0}^{r} (1 - p_i);$$

p_i Вероятность потерь на *i* участке сети

r Число участков сети

M/M/V (ДО с ожиданием)

Вероятность задержки

$$p = D_v(y) = \frac{E_v(y)}{1 - \frac{y}{v}\left(1 - E_v(y)\right)}$$

2 Формула Эрланга

$E_v(y)$ - 1 Формула Эрланга;

y - Интенсивность нагрузки Эрл.;

v - число обслуживающих устройств.

M/G/1

Задержка начала обслуживания (время ожидания)

$$\overline{W} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{y^2}{2(1-y)} \left(1 + \left(\frac{\sigma_t}{\bar{t}} \right)^2 \right)$$

Формула Полячека-Хинчина

$$\overline{T} = \overline{W} + \bar{t}$$

$\bar{t}$ - средняя продолжительность обслуживания (ед.времени).

σ_t - среднеквадратическое отклонение длительности обслуживания.

λ - параметр потока (интенсивность заявок для стационарного потока).

$L = \lambda \cdot \overline{W}$ Средняя длина очереди Формула Литтла

M/M/1

$$\sigma_t = \bar{t}$$

$$\bar{T}_M = \frac{\bar{t}}{1-y}$$

M/D/1

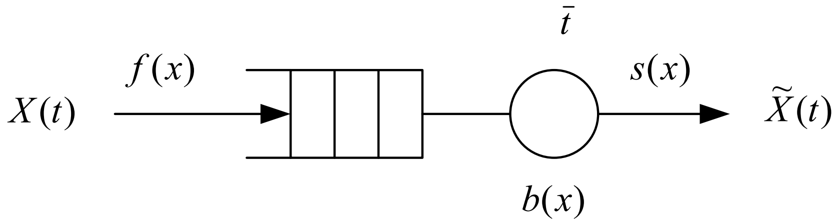
$$\sigma_t = 0$$

$$\bar{T}_D = \frac{y \cdot \bar{t}}{2(1-y)} + \bar{t}$$

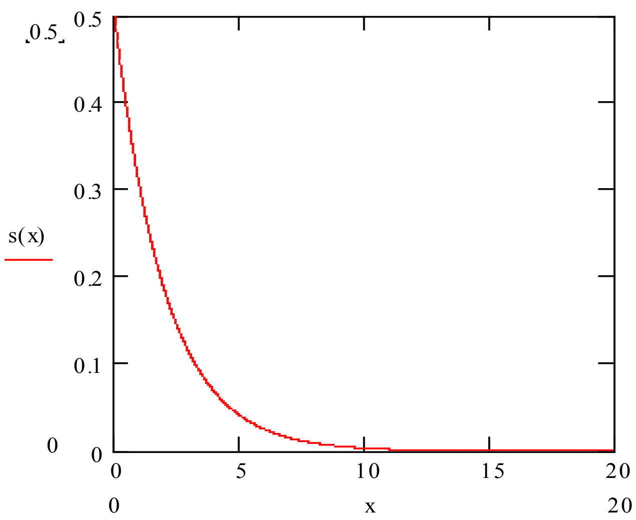
$$y = \rho = \lambda \cdot \bar{t} = \frac{\lambda}{\mu}$$

M/M/1

Теорема Бёрке



$$s(x)_M = \mu(1-y) \cdot e^{-\mu \cdot (1-y) \cdot x}$$



$$f(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x};$$

$$b(x) = 1 - e^{-\mu \cdot x}; \quad \mu = \frac{1}{\bar{t}}$$

Теорема Бёрке

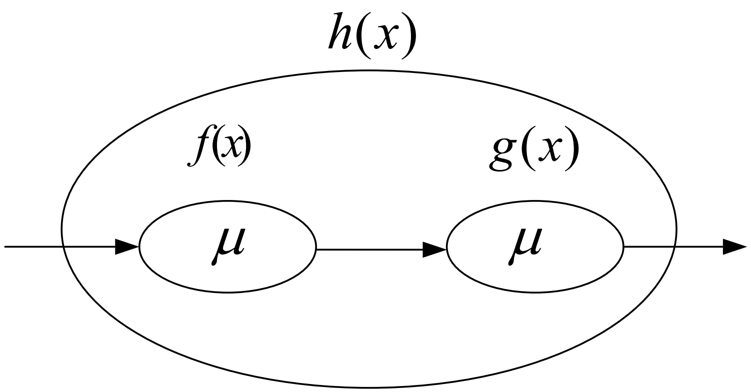
Аппроксимация Клейнрока

Если выполняется следующий ряд условий:
-на узлы сети поступают внешние потоки трафика, которые можно считать простейшими;
-время обслуживания в узлах распределено по показательному закону;
-сеть является сильно связанной;
то при средних и и больших нагрузках узлы сети можно рассматривать как независимые СМО типа М/М/1.

В ряде случаев, когда выполняются перечисленные выше условия, сеть можно представить как сеть как сеть из независимых СМО типа М/М/1. Это позволяет в значительной степени упростить анализ функционирования сети связи.

3.2.4 Последовательность СМО

Функция распределения для последовательности устройств



$$\overset{*}{F}(x) = L\big(f(x)\big) = \int_0^\infty f(x) e^{-s\cdot t} dt$$

$$f(x) = L^{-1}\left(\overset{*}{F}(x)\right) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \int_{\sigma 1 - i\cdot\infty}^{\sigma 1 + i\cdot\infty} \overset{*}{F}(x) e^{-s\cdot x} ds$$

$$h(x) = L^{-1}\left\{L\big(f(x)\big)\cdot L\big(g(x)\big)\right\}$$

$$h(x) = L^{-1}\left(\prod_{i=1}^{n} L\big(f_i(x)\big)\right)$$

n Число последовательных СМО

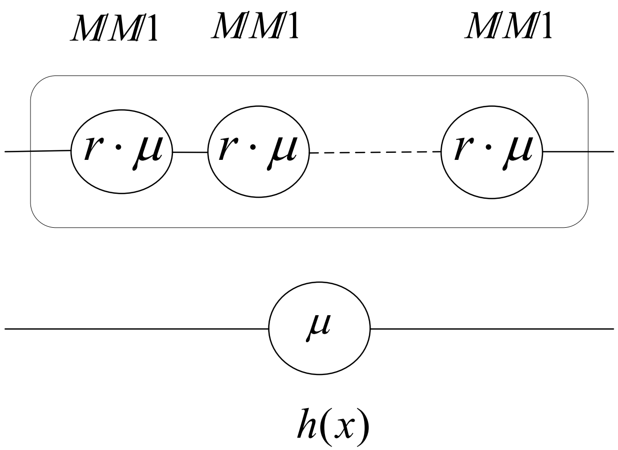
$f_i(x)$ Плотность распределения времени обслуживания *i* СМО

$h(x)$ Плотность распределения времени обслуживания последовательности СМО

$L(f_i(x))$ Преобразование Лапласа $f_i(x)$

$L^{-1}(\ \ )$ Обратное преобразование Лапласа

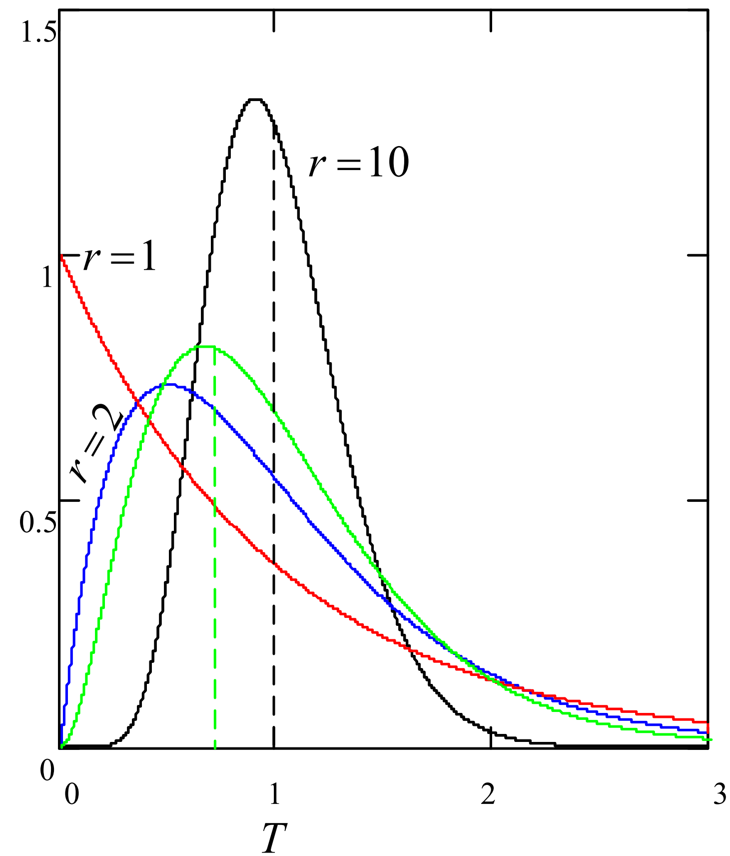
Пример последовательности СМО M/M/1



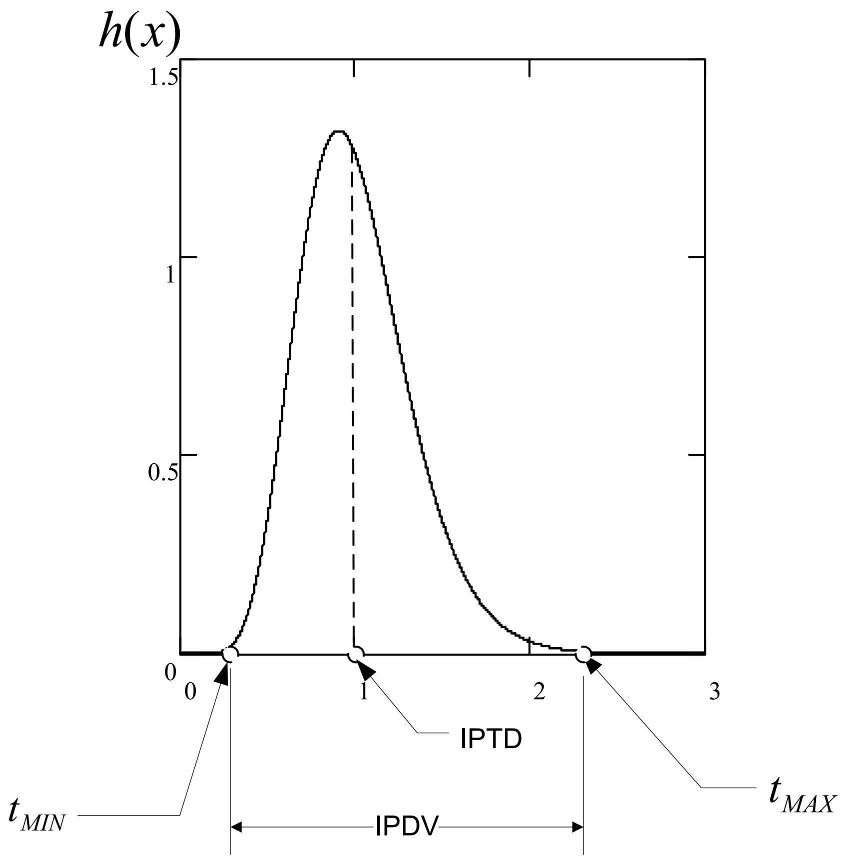
$$h(x) = \frac{r\mu(r\mu x)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-r\cdot\mu\cdot x}$$

$$\bar{t}_i = \frac{1}{r \cdot \mu}$$

$$\bar{T} = \frac{1}{\mu}$$



Оценка задержки и джиттера (IPTD, IPDV)



$$IPTD = \sum_{i=1}^{r} \overline{T_i}$$

$$IPDV = t_{MAX} - t_{MIN}$$

$$\int_{t_{MIN}}^{t_{MAX}} h(x)dx = 0{,}999$$

$$t_{MIN} \approx \sum_{i=1}^{r} \bar{t}_i$$

Потери пакетов данных (IPLR)

Модель обслуживания в узлах сети M/M/1/K (конечный размер буфера)

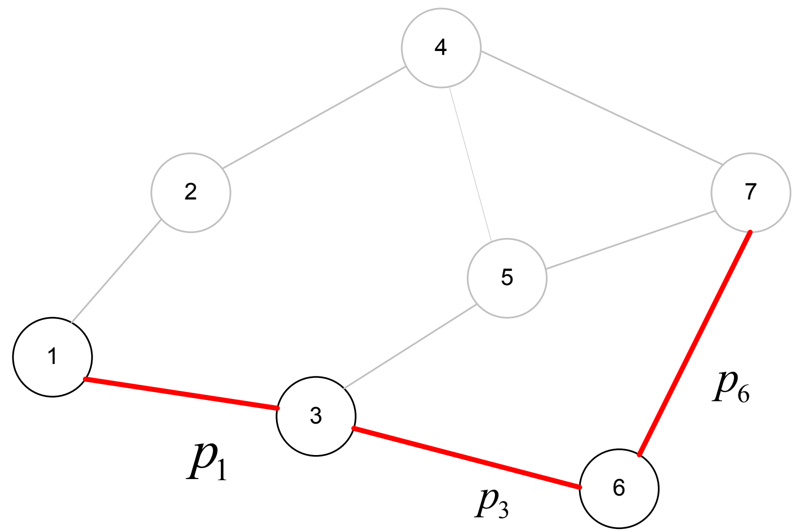
Вероятность потери в узле

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1-y}{1-y^{K+1}} \cdot (y)^k; & 0 \le k \le K+1 \\ 0 \end{cases};$$

$$y = \frac{\lambda}{\mu};$$

Пакет теряется при

$$k = K+1$$



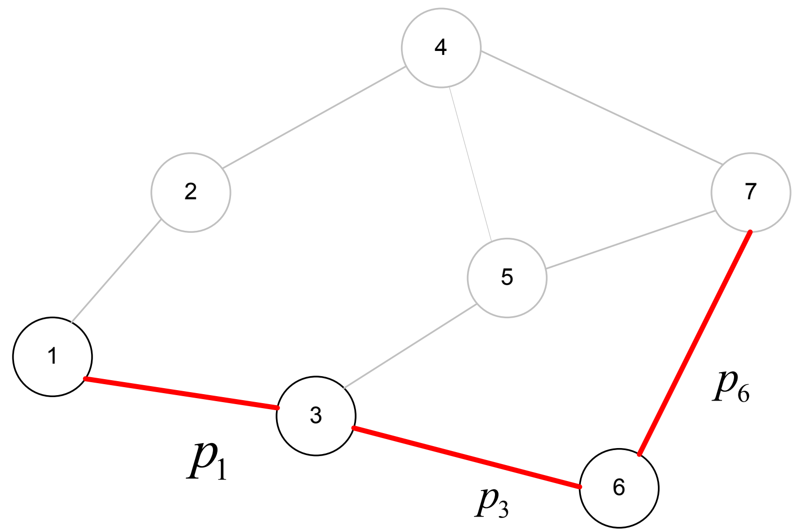
$$p_{1,7} = 1-(1-p_1)(1-p_3)(1-p_6)$$

$$IPLR = p = 1 - \prod_{i=1}^{r}(1-p_i)$$

Ошибки в пакетах данных (IPER)

Основная доля ошибок возникает при передаче данных по линиям связи

Потери на участке маршрута зависят от типа линии передачи и ее протяженности и нормируются для различных систем передачи.



$$p_{1,7} = 1 - (1 - p_1)(1 - p_3)(1 - p_6)$$

$$IPER = p = 1 - \prod_{i=1}^{r} (1 - p_i)$$

3.2.5 Потоки отличные от простейшего

Поток $X = (X_1, X_2, .. X_t ..) \quad t = 1,2,...$

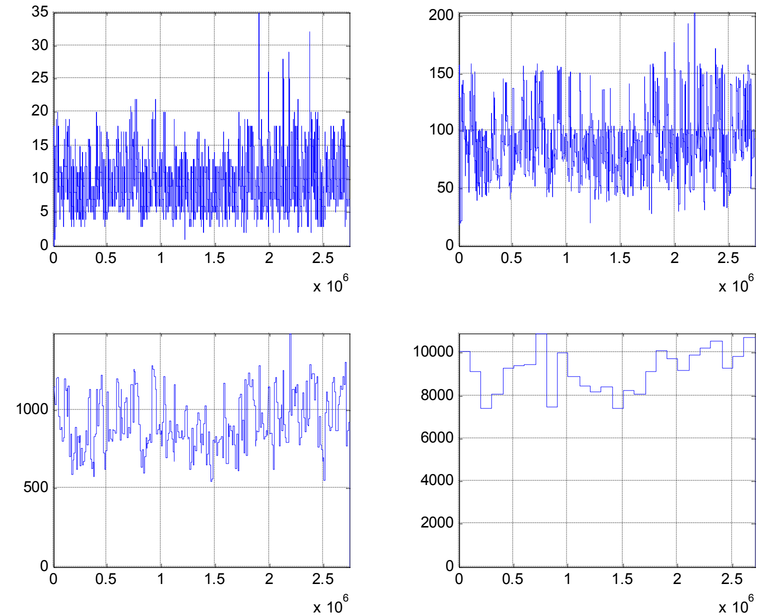
Автокорреляционная функция потока

$$r(k) = \frac{\sum_{i=1}^{N-k} \left(X_i - \overline{X}\right)\left(X_{i+k} - \overline{X}\right)}{(N-k)\sigma^2}$$

Агрегированный поток

$$X^{(m)} = (X_1^{(m)}, X_2^{(m)}, .. X_t^{(m)} ..); \qquad r_m(k)$$

$$X_t^{(m)} = \frac{1}{m}\left(X_{tm-m+1} + \ldots + X_{tm}\right)$$



Самоподобные потоки

$r_m(k) = r(k); \qquad m = 2,3,...$ строго самоподобный в широком смысле

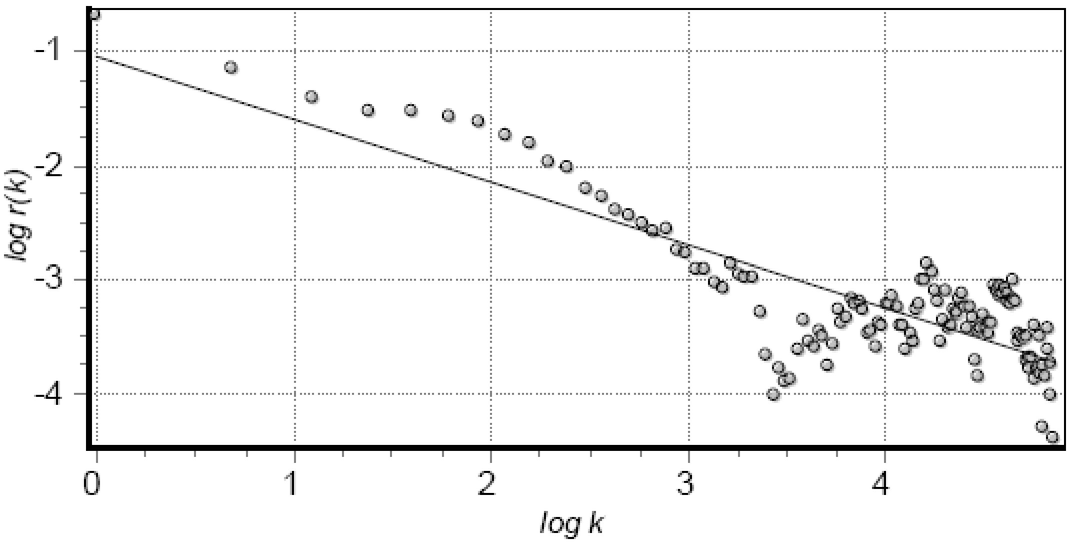
$\lim_{m\to\infty} r_m(k) = r(k)$ асимптотически самоподобным

$m^{1-H} X^{(m)} \doteq X$ строго самоподобный в узком смысле

$0 < H < 1$ **коэффициент Херста**

$H = 0{,}5$ **простейший** поток $H > 0{,}5$ **самоподобный** поток $H < 0{,}5$ **антиперсистентный** поток

Оценка коэффициента Херста и АКФ

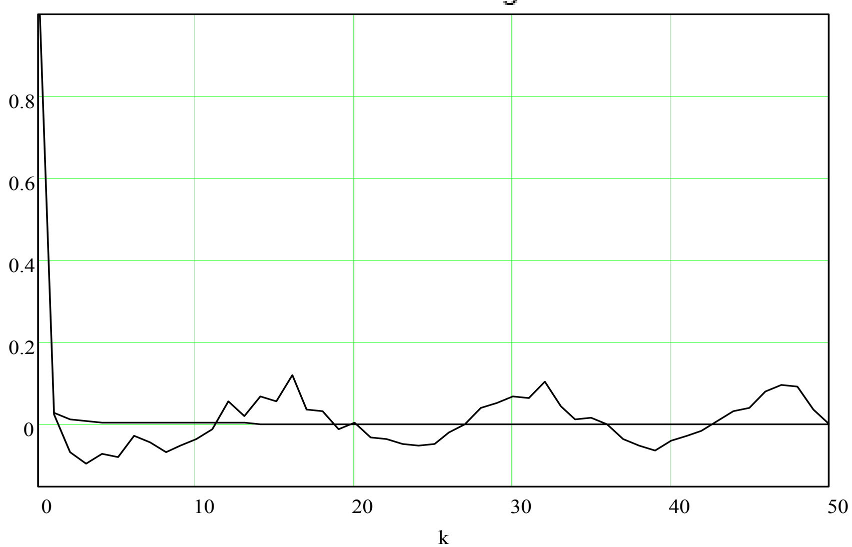


Метод анализа изменения дисперсии

$$\ln\left(\frac{D(X^{(m)})}{D(X)}\right) = (2H-2)\ln(m)$$

$$\beta = 2-2H$$

$$H = 1-\frac{\beta}{2}$$

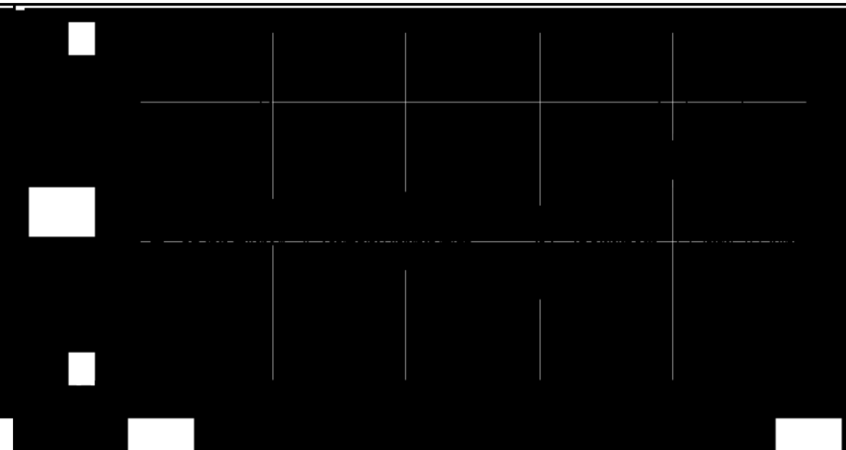


$$r(k) = \frac{1}{2}\left((k+1)^{2\cdot H} - 2\cdot k^{2\cdot H} + (k-1)^{2\cdot H}\right)$$

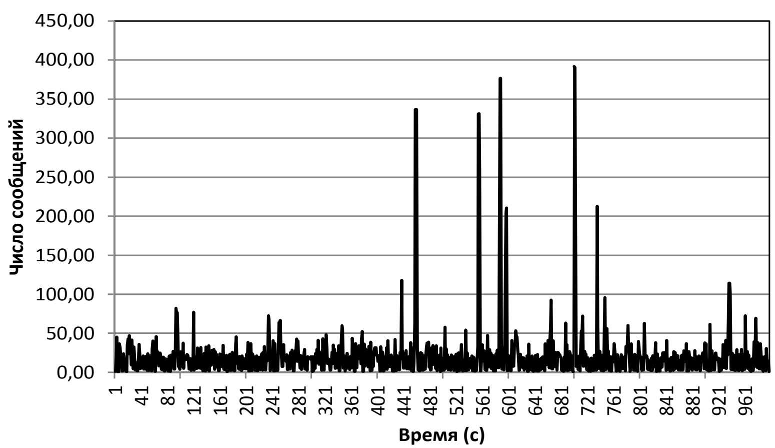
Пример реализаций простейшего, самоподобного и антиперсистентного потоков

Простейший поток H=0,5

Самоподобный поток H=0,9



Антиперсистентный поток H=0,3



GI/G/1

$$\bar{T}_D \le \frac{y \cdot \bar{t}}{2(1-y)} \left(\frac{D_a + D_b}{\bar{t}^{\,2}} \right) + \bar{t}$$

Неравенство Кингмана (Kingman)

$$\bar{T}_D \approx \frac{y \cdot \bar{t}}{2(1-y)} \left(\frac{D_a + D_b}{\bar{t}^{\,2}} \right) \left(\frac{\bar{t}^{\,2} + D_b}{a^2 + D_b} \right) + \bar{t}$$

Аппроксимация Маршала (Marchall)

$\bar{t}$ - средняя продолжительность обслуживания (ед.времени)

D_a - дисперсия интервалов времени между моментами поступления пакетов (ед.времени^2)

D_b - дисперсия времени обслуживания пакетов (ед.времени^2)

y - интенсивность нагрузки (Эрл)

a - интенсивность поступления пакетов (пакетов/с)

3.3 Модели надежности сети связи

3.3.1 Общие определения

В отрасли связи действует ГОСТ Р 53111-2008, определяющий устойчивость функционирования сети связи общего пользования. Ниже приведены определения согласно данному документу.

1 устойчивость функционирования сети электросвязи: Способность сети электросвязи выполнять свои функции при выходе из строя части элементов сети в результате воздействия дестабилизирующих факторов.

2 дестабилизирующий фактор: Воздействие на сеть электросвязи, источником которого является физический или технологический процесс внутреннего или внешнего по отношению к сети электросвязи характера, приводящее к выходу из строя элементов сети.

3 коэффициент готовности: Вероятность того, что объект находится в работоспособном состоянии в любой момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается.

4 коэффициент оперативной готовности: Вероятность того, что объект находится в работоспособном состоянии в любой момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается, и, начиная с этого момента, будет работать безотказно в течение заданного интервала времени.

5 надежность сети электросвязи: Свойство сети электросвязи сохранять способность выполнять требуемые функции в условиях воздействия внутренних дестабилизирующих факторов (т.е. сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения и технического обслуживания).

Общие определения

6 живучесть сети электросвязи: Свойство сети электросвязи сохранять способность выполнять требуемые функции в условиях, создаваемых воздействиями внешних дестабилизирующих факторов.

7 работоспособное состояние: Состояние объекта, при котором значения всех параметров, характеризующих способность выполнять им заданные функции, соответствуют требованиям или нормам.

8 средняя наработка на отказ: Отношение суммарной наработки восстанавливаемого объекта к математическому ожиданию числа его отказов в течение этой наработки.

9 вероятность связности (связность) направления электросвязи: Вероятность того, что на заданном направлении электросвязи существует хотя бы один путь, по которому возможна передача информации с требуемыми качеством и объемом.

10 внутренний дестабилизирующий фактор: Дестабилизирующий фактор, источник которого расположен внутри сети электросвязи или ее элементов.

11 внешний дестабилизирующий фактор: Дестабилизирующий фактор, источник которого расположен вне сети электросвязи.

12 направление связи (основное направление связи): Совокупность линий передачи и узлов связи, обеспечивающая связь между двумя пунктами сети для обеспечения деятельности органов государственного управления, обороны, безопасности, охраны правопорядка, мобилизационной готовности при чрезвычайных ситуациях.

В качестве показателя надежности каналов электросвязи применяется коэффициент готовности Кг канала электросвязи, определяемый выражением:

Кг = То/(То + Тв), (1)

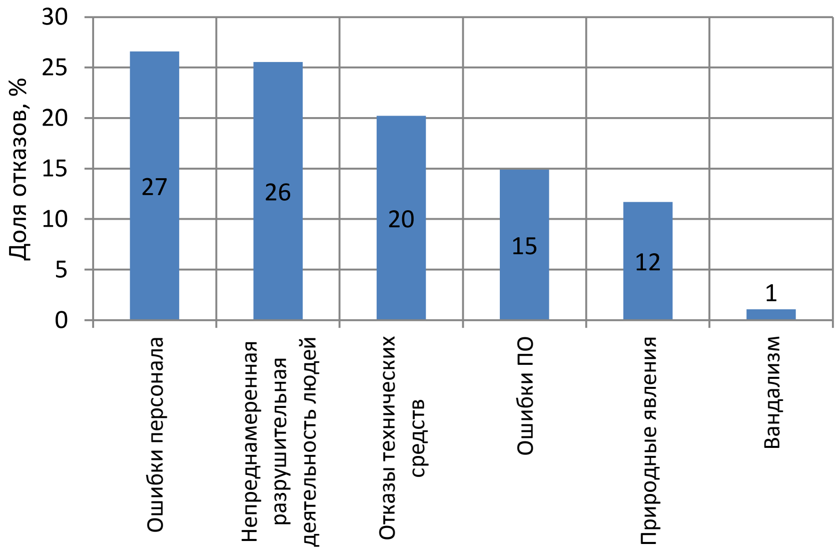
где То - среднее время наработки на отказ канала электросвязи;

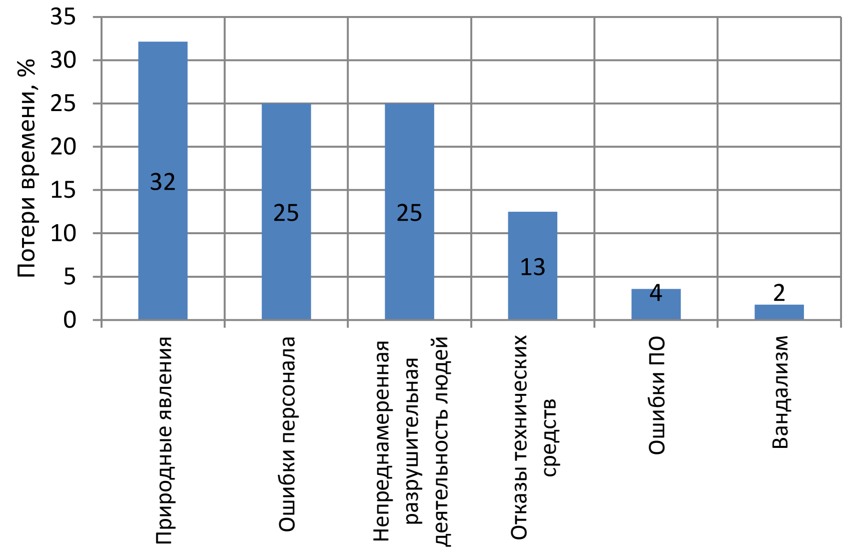
Тв - среднее время восстановления работоспособности канала электросвязи.

Иллюстрации (надежность сетей связи)

Alcatel-Lucent Bell Labs

Уязвимости системы телекоммуникаций

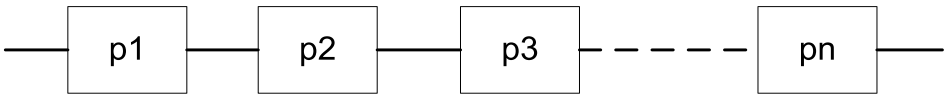




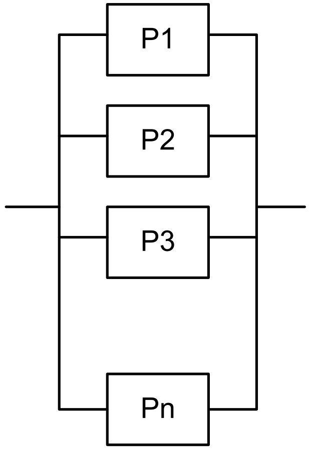
США (FCC)

N	Группа факторов	Доля от общего количества отказов, %	Потери пользователь-ского времени, %
1	Отказы технических средств	19	7
2	Перегрузки сети	6	44
3	Ошибки ПО	14	2
4	Ошибки персонала	25	14
5	Вандализм	1	1
6	Непреднамеренная разрушительная деятельность людей	24	14
7	Природные явления	11	18

3.3.2 Надежность простейших структур (последовательное и параллельное включение элементов)

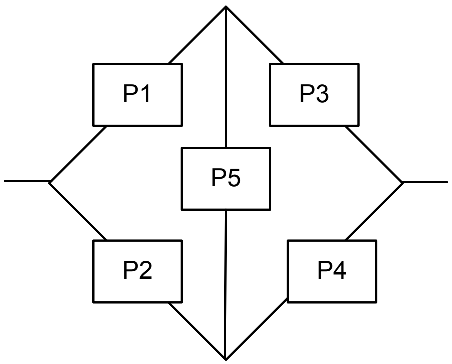


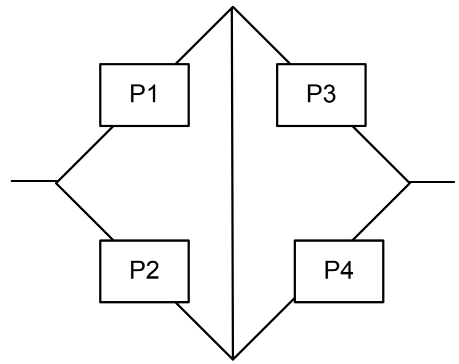
$$P = \prod_{i=1}^{n} p_i$$



$$P = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)$$

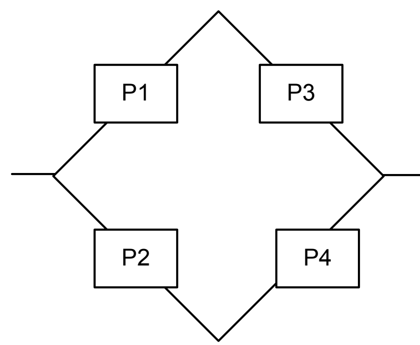
3.3.3 Мостовая схема включения





$$P(W \mid e_5) = (1 - q_1 q_2)(1 - q_3 q_4)$$

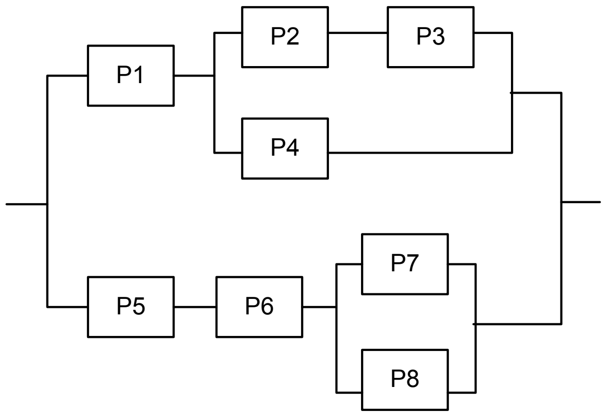
$$P = p_5 P(W \mid e_5) + q_5 P(W \mid \bar{e}_5)$$

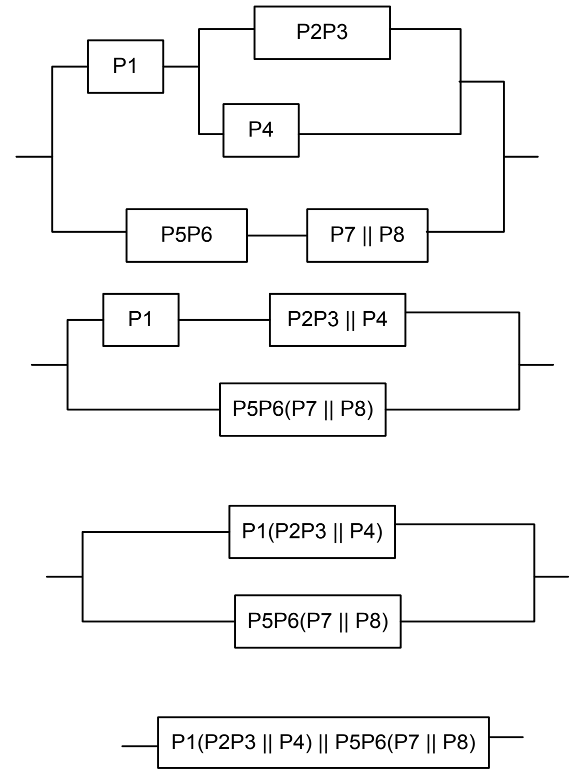


$$P(W \mid \bar{e}_5) = 1 - (1 - p_1 p_3)(1 - p_2 p_4)$$

$$P = p_5 (1 - q_1 q_2)(1 - q_3 q_4) + q_5 (1 - (1 - p_1 p_3)(1 - p_2 p_4))$$

3.3.4 Метод декомпозиции





$$p_2 p_3 \parallel p_4 = 1-(1-p_2 p_3)(1-p_4)$$

$$p_7 \parallel p_8 = 1-(1-p_7)(1-p_8)$$

$$P = p_1(1-(1-p_2 p_3)(1-p_4)) \parallel p_5 p_6(1-(1-p_7)(1-p_8)) =$$
$$= 1-(1-p_1(1-(1-p_2 p_3)(1-p_4)))(1-p_5 p_6(1-(1-p_7)(1-p_8)))$$

3.3.5 Метод включения-исключения (IE – Inclusion – Exclusion)

Пусть граф сети имеет *l* путей между заданными двумя узлами

E_j Событие, которое заключается в том что все элементы пути *Tj* исправны

$$P_r(E_j) = \prod_{i \in T_j} p_i$$

Система из *l* работает, когда работает хотя бы один путь

3.5 Метод добавления-удаления (IE – inclusion-exclusion)

$$P = P_r\left(\bigcup_{j=1}^{l} E_j\right)$$

$$P = \sum_{k=1}^{l} (-1)^{k-1} S_k$$

$$S_k = \sum_{1 \le i1 \le i2 \le \ldots \le ik \le l} P_r\left(E_{i1} \cap E_{i2} \cap \ldots \cap E_{ik}\right)$$

Неравенства Бонферрони

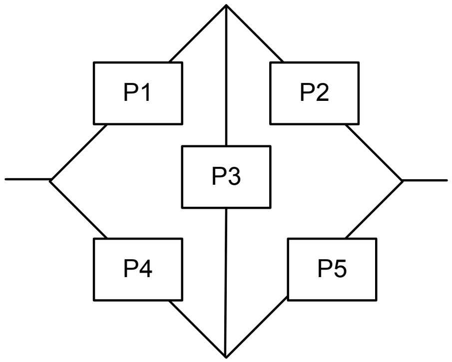
$$P \le S_1$$

$$P \ge S_1 - S_2$$

$$P \le S_1 - S_2 + S_3$$

$$P \ge S_1 - S_2 + S_3 - S_4$$

Метод включения-исключения (пример)



$$P_r(MP_1) = p_1 p_2$$
$$P_r(MP_2) = p_4 p_5$$
$$P_r(MP_3) = p_1 p_3 p_5$$
$$P_r(MP_4) = p_2 p_3 p_4$$

$$S_1 = P_r(MP_1) + P_r(MP_2) + P_r(MP_3) + P_r(MP_4) = p_1 p_2 + p_4 p_5 + p_1 p_3 p_5 + p_2 p_3 p_4$$

$$S_2 = P_r(MP_1 MP_2) + P_r(MP_1 MP_3) + P_r(MP_1 MP_4) + P_r(MP_2 MP_3) + P_r(MP_2 MP_4) + P_r(MP_3 MP_4) =$$
$$= p_1 p_2 p_4 p_5 + p_1 p_2 p_3 p_5 + p_1 p_2 p_3 p_4 + p_1 p_3 p_4 p_5 + p_2 p_3 p_4 p_5 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$$

$$S_3 = P_r(MP_1 MP_2 MP_3) + P_r(MP_1 MP_2 MP_4) + P_r(MP_1 MP_3 MP_4) + P_r(MP_2 MP_3 MP_4) =$$
$$= 4 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$$

$$S_4 = P_r(MP_1 MP_2 MP_3 MP_4) = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$$

$$P = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 = p_1 p_2 + p_4 p_5 + p_1 p_3 p_5 + p_2 p_3 p_4 - (p_1 p_2 p_5 + p_1 p_2 p_3 p_5 + p_1 p_2 p_3 p_4 +$$
$$+ p_2 p_3 p_4 p_5 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5) + 2 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$$

Выводы

- Оптимизация сети связи является комплексной задачей для решения которой требуется решение задач различного характера начиная с уровня элемента сети до уровня управления и планирования ее развития;

- Для решения задач на различных уровнях используются различные методы оптимизации, позволяющие решить задачи данного уровня.

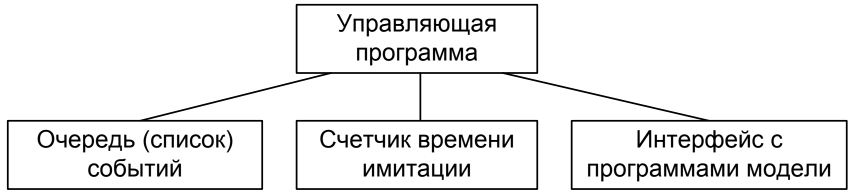
- Для постановки задачи оптимизации требуются математические модели элементов сетей связи, позволяющие построить целевую функцию, т.е. построить зависимость некоторого параметра или параметров, отражающих эффективность, от значений параметров управления.

3.4 Имитационное моделирование
3.4.1 Дискретные событийные модели

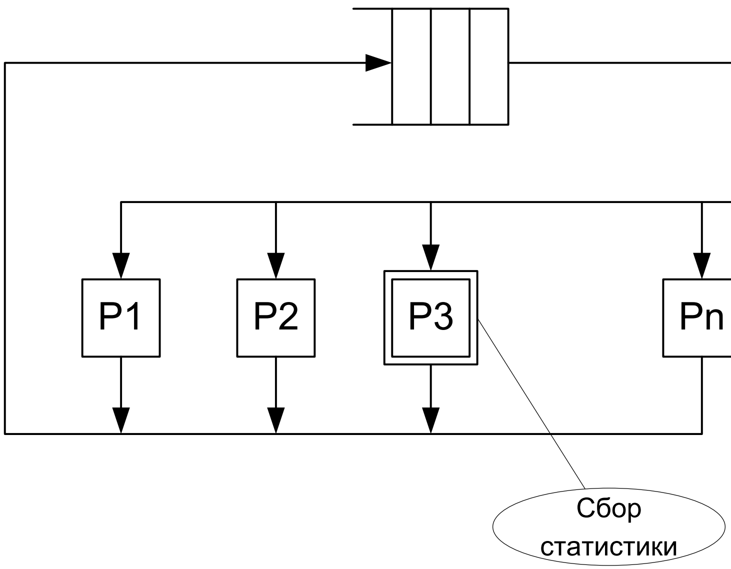
- Имитационное моделирование - это метод исследования, при котором исследуемая система заменяется ее моделью, которая достаточно точно описывает ее свойства. Модель используется для проведения экспериментов. В результате эксперимента получают данные, которые являются результатами измерений и подлежат статистической обработке для получения оценок численных значений исследуемых параметров.

- При построении имитационных моделей сетей связи, как правило, применяются дискретные событийные модели (discrete event driven).

3.4.2 Общая структура имитационной событийной модели



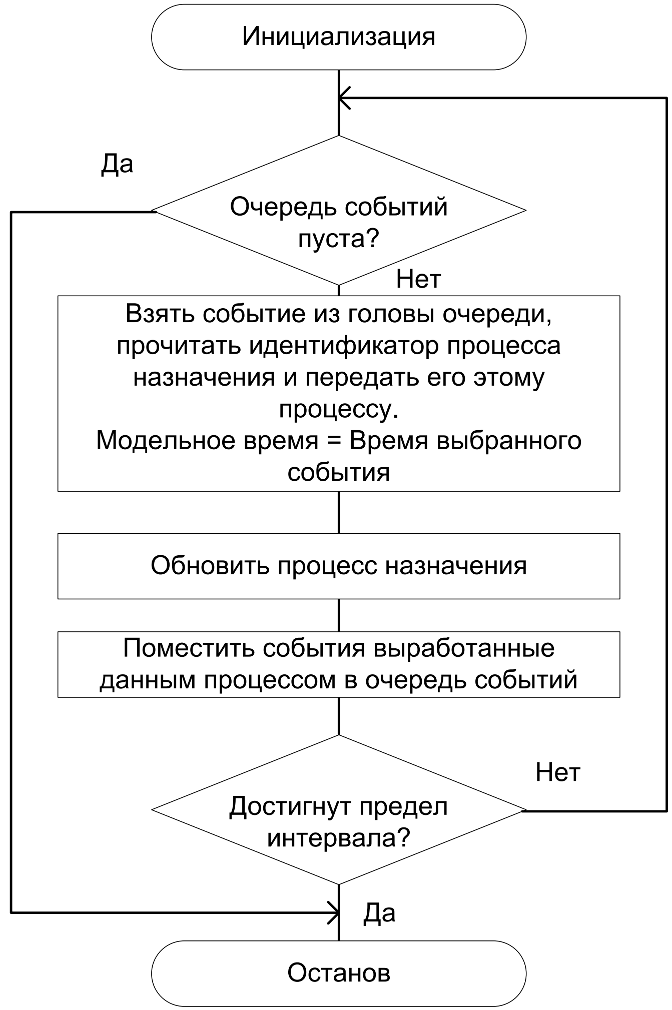
Очередь событий



Очередь событий

Время имитации	Событие	Процесс назначения
t0	*e12*	*P9*
t1	*e11*	*P11*
t2	*e3*	*P1*
tm	*e2*	*P2*

Алгоритм


Инициализация
Да
Очередь событий пуста?
Нет
Взять событие из головы очереди, прочитать идентификатор процесса назначения и передать его этому процессу.
Модельное время = Время выбранного события
Обновить процесс назначения
Поместить события выработанные данным процессом в очередь событий
Нет
Достигнут предел интервала?
Да
Останов

Функционирование событийной имитационной модели

- В общем случае, событийная модель включает в себя набор процессов (программ), имитирующих процесс обработки событий происходящих в имитируемой системе (сети связи) в моменты изменения ее состояния. Таким образом, состояние модели обновляется только в моменты времени, соответствующие этим событиям.
  – Событие в модели описывается набором характеризующих его данных. Обязательным элементом этого набора является - модельное время, т.е. момент времени, когда это событие должно произойти.
  – Например, поток пакетов (трафик) может быть представлен как последовательность событий поступления пакетов. Событие поступления пакета передается процессу имитирующему очередь. Этот процесс, в свою очередь, тоже может выработать событие, адресованное другому процессу, имитирующему обслуживающее устройство и т.д. Таким образом, каждый из процессов, получив событие может выработать одно или несколько событий, адресованных другим процессам. Все вырабатываемые события помещаются в очередь событий. Там они упорядочиваются по значению модельного времени.
  – В общем цикле имитационной модели происходит выбор из головы очереди очередного события, приравнивание счетчика модельного времени модельному времени данного события, передача события процессу назначения, обновление состояния модели, передача выработанных процессами событий в очередь событий, упорядочение очереди событий и т.д., до достижения условия завершения.
  – Таким образом модельное время течет «скачками» от события к событию, в моменты этих скачков производится обновление состояния модели.

3.4.3 Последовательности событий

- Таким образом, одной из основных задач при построении дискретной событийной модели является получение необходимой последовательности событий, т.е. последовательности чисел, представляющих собой моменты модельного времени наступления событий (или интервалов времени между ними).
- Например, поток пакетов (трафик) в модели может быть представлен последовательностью чисел, имитирующих интервалы времени между моментами поступления пакетов.
- В зависимости от того, какой процесс моделируется, эта последовательность чисел должна обладать определенными свойствами.
- Обычно, для получения таких последовательностей используются генераторы псевдослучайных чисел с необходимыми свойствами (характеристиками псевдослучайной величины).

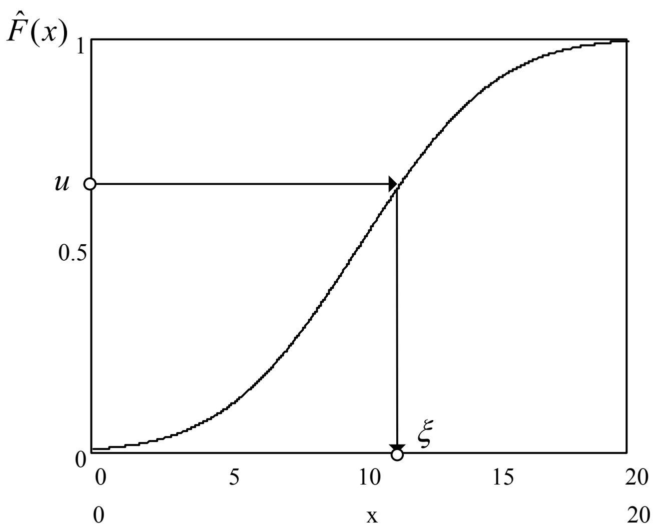
- Существуют некоторые методы получения псевдослучайных чисел с требуемыми статистическими свойствами.

Получение потока событий с заданными свойствами

Метод обратной функции

Если требуется получить случайную величину с функцией распределения F(x), то следует получить случайную величину *u* с равномерной функцией распределения в диапазоне [0,..,1), а требуемая величина будет равна:

$$\xi = F^{-1}(u)$$



$F^{-1}(u)$ функция обратная функции *F*(*u*)

Функция *g(x)* является обратной к функции *f(x)* когда выполняется условие: *y=f(x), x=g(y)*.

Для того чтобы из функции *f(x)* получить обратную нужно решить уравнение *y=f(x)* относительно x и поменять переменные *y* и *x* местами.

Пример для экспоненциального распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

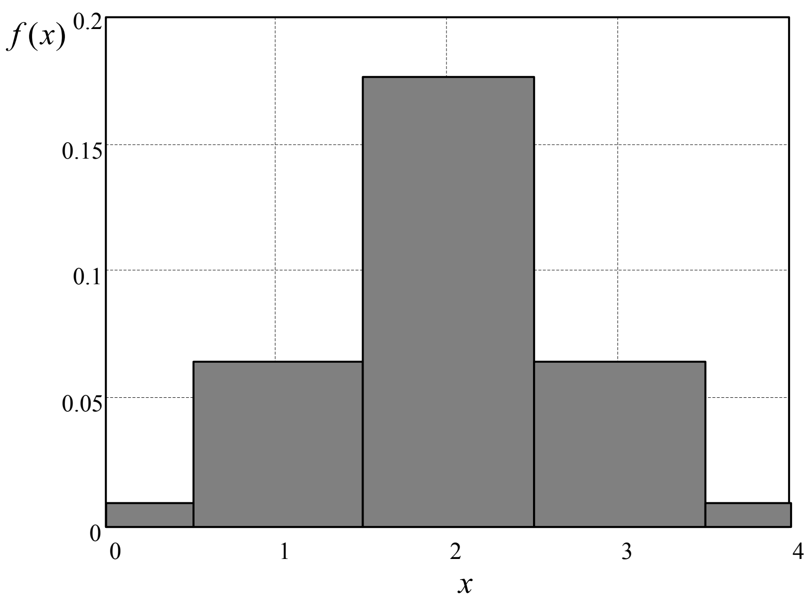
$$F^{-1}(x) = \frac{\ln(1-x)}{-\lambda}$$

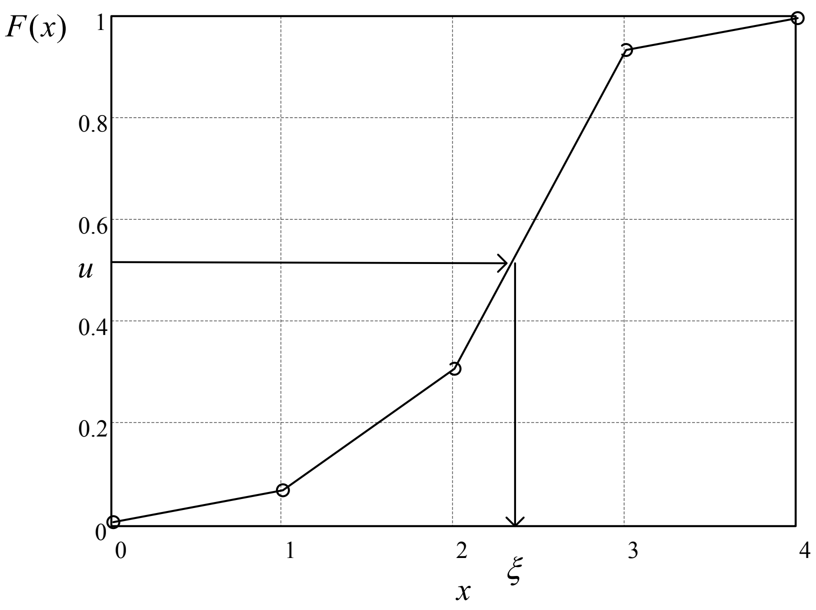
Используя в качестве переменной случайное число *U* с равномерным законом распределения получим случайное число ξ с экспоненциальным распределением вероятности

$$\xi = \frac{\ln(1-u)}{-\lambda}$$

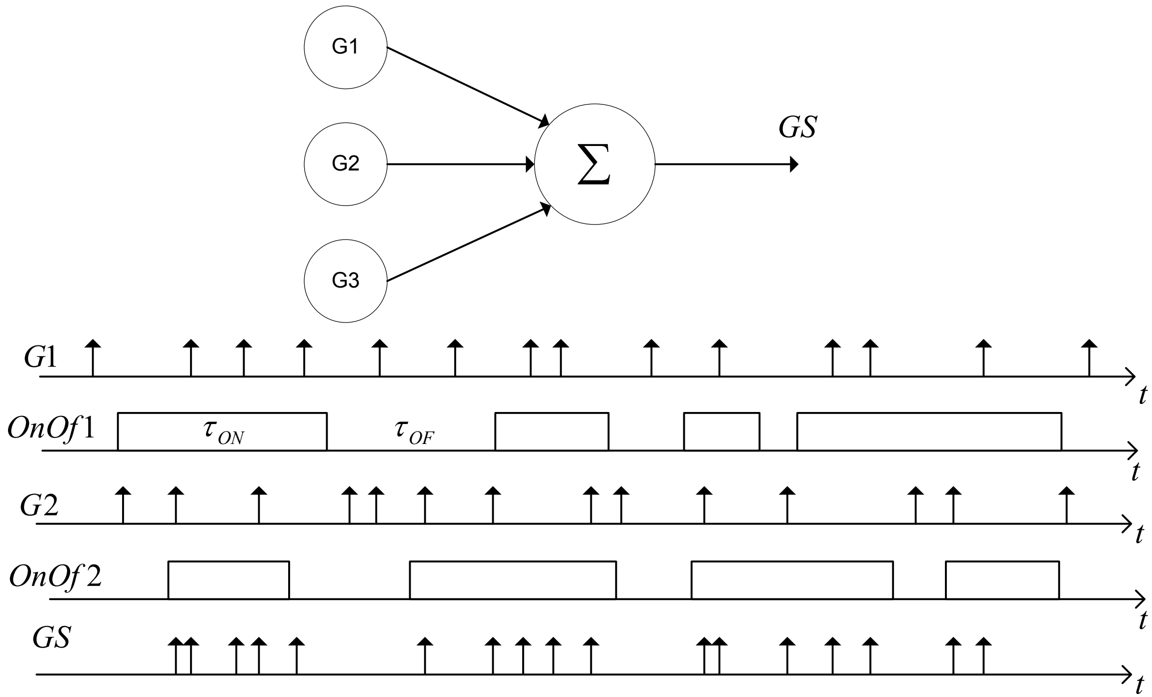
Эмпирический закон распределения

Пусть требуется получить случайную величину, подчиняющуюся некоторому эмпирическому закону распределения вероятности. Например, требуется имитировать некоторую случайную величину, по результатам проведения измерений.





On/off моделирование самоподобного потока



$$F(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha} \qquad f(x) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1} \qquad E(X) = \frac{\alpha\beta}{\alpha - 1} \qquad D(X) = \left(\frac{\beta}{k-1}\right)^{2} \frac{\alpha}{\alpha - 2}$$

Примеры систем имитационного моделирования

- GPSS
- ns2
- OPNET
- AnyLogic